

基于点到面度量的多视角点云配准方法

马洁莹, 田暄, 翟庆, 王丞

(西安交通大学软件学院, 710049, 西安)

摘要: 针对现有的大多数基于点到点度量的多视角点云配准方法在配准过程中, 由于物体表面离散化而无法获得点到点的精确重叠, 从而导致的收敛速度慢、配准精度低的问题, 提出一种基于点到面度量的多视角点云配准方法。为获得多视角点云匹配结果, 采用逐步求精的策略将多视角配准问题分解成多个点到面双视角配准子问题进行求解。在双视角配准过程中: 使用数据点与对应点处切平面的距离误差代替点对距离误差, 给出新的目标函数; 提出高效法向量转换策略, 以减少多视角配准的每次迭代中平面法向量的求解次数。在目标函数的求解过程中, 用线性最小二乘法逼近非线性优化问题, 从而实现点到平面误差的最小化。将所提方法在斯坦福数据集上进行了测试, 实验结果表明: 与当下较为流行的多视角配准方法相比, 所提方法在不同数据集上的旋转误差均降低了 38.9% 以上, 平移误差均降低了 16.6% 以上, 能够快速实现精确、可靠的多视角点云配准。

关键词: 多视角配准; 点到面度量; 线性最小二乘; 平面法向量

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202206015 **文章编号:** 0253-987X(2022)06-0120-13



OSID 码

Registration of Multi-View Point Sets Based on Point-to-Plane Measurement

MA Jieying, TIAN Xuan, ZHAI Qing, WANG Cheng

(School of Software Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Most of the existing multi-view point set registration methods based on point-to-point measurement cannot obtain the accurate overlap of the individual points due to the discretization of object surface, resulting in the problems of slow convergence and low registration accuracy. To solve this problem, this paper proposed a multi-view point set registration method based on point-to-plane measurement. To achieve the multi-view registration, the proposed method uses the stepwise refinement strategy to break down the multi-view registration problem into several point-to-plane pair-wise registration problems. In the pair-wise registration process, first of all, a new objective function is given which uses the point-to-plane error to replace the point-to-point distance error; Secondly, an effective normal vector transformation strategy is proposed to reduce the times of solving the plane normal vector in each iteration of the multi-view point set registration. Then, in the process of solving the objective function, the linear least square method is used to approximate the nonlinear optimization problem, so as to minimize the point-to-plane error. Finally, the proposed method is tested on Stanford data sets, and the experimental results show that: compared with four other multi-view registration methods, the proposed method reduces

the rotation error by more than 38.9% in terms of different data sets, and the translation error by more than 16.6%, thus effectively achieving accurate and reliable multi-view point sets registration.

Keywords: multi-view registration; point-to-plane; linear least squares; normal vector

点云配准是计算机视觉^[1-2]、图像识别^[3-4]、机器人^[5-6]等领域的一个基本问题。点扫描设备的发展使得重建三维物体模型或场景模型成为可能,但由于物体自遮挡或视角的限制,通常不能一次性获取到物体或场景的全部信息,需要使用点云配准方法将多个视角采集到的点云数据统一到一个参考系中,从而实现三维物体或场景模型的重构。根据所涉及点云的数量,可将配准问题分为双视角配准和多视角配准两个子问题。

目前,已经有多种用于解决双视角配准问题的方法,其中最为经典的是 Besl 等^[7]提出的迭代最近点(ICP)算法,它可以实现成对点云的高效配准。但是,该方法不能处理非重叠点云,且当迭代次数增加时,会产生局部收敛问题。为此,Chetverikov 等^[8]提出了裁剪迭代最近点方法以解决不重叠点云之间的配准问题,该方法引入重叠百分比,自动裁剪点云非重叠区域,减少非重叠区域对配准精度的影响。对于含有噪声的点集,Magnusson 等^[9]提出了 3D-NDT 方法,将目标点集所占据的三维空间细分为正则化单元,用正态分布模拟数据点的概率,具有一定的鲁棒性。除此之外,Bouaziz 等^[10]提出了稀疏最近点迭代方法,该方法使用 l_b 范数代替传统的 l_2 范数,以减少离群值对配准的影响。为解决局部收敛问题,Shi 等^[11]将点云滤波方法与裁剪 ICP 方法相结合来进行点云之间的配准。与此同时,许多基于点特征的方法^[12-13]也被提出为配准提供良好的初值。但是,ICP 方法还存在收敛速度慢的缺点,为此 Pavlov 等^[14]基于安德森加速的思想提出了 AA-ICP 方法,Zhang J. 等^[15]在此基础上加入威尔斯函数进一步提高了 ICP 的收敛速度。

在实际应用中,用于配准的数据点往往取自几何表面,使用点到点误差度量的目标函数即使已收敛也不可能获得单个点的精确重叠,这将在一定程度上导致点云的配准误差。为此 Chen 等^[16]提出了点到面误差度量的迭代最近点方法。点到平面度量通常使用标准非线性最小二乘法来求解,非常耗时。Rusinkiewicz 等^[17]研究发现,当两个输入面之间相对旋转较小时,可以将非线性最小二乘问题近似为线性最小二乘优化问题进行求解。基于这一论断,

Low^[18]推导了使用点到面 ICP 方法的线性求解方法。Park 等^[19]在原始能量项的基础上增加了一个对应点之间的颜色约束,Rusinkiewicz^[20]进行了另一种改进,该方法考虑了对应点对中两个点的法线,并提出了对称目标函数,在光滑模型或包含一定噪声的情况下具有更良好的表现。

相对于双视角配准,多视角配准问题涉及的点云数量更多,配准的复杂程度也更大。对于多视角配准,较为简单直接的是校准-积分方法^[16],该方法对两个点集进行配准及合并,直到所有的点集统一到一个模型中。之后,Bergevin 等^[21]提出用星网来组织所有点集,依次将点集置于星网中心,计算该帧点云与其他各帧点云的刚性变换参数。然而,使用以上两种方法对点云进行顺序配准,将不可避免地会出现累积误差的问题。为此,徐思雨等^[22]提出了逐步求精策略,通过双视角配准方法不断对粗糙模型进行修正,解决了累积误差的问题,最终实现了多视角点云的匹配。

为避免顺序估计,Gojcic 等^[23]提出了第一个端到端、数据驱动的多视角点云配准方法,直接以全局的方式配准所有点云。基于 K-means 的点云配准方法^[24]将配准问题转化为聚类问题,在全局坐标系下进行聚类操作来实现多视角点云之间的匹配。Mateo 等^[25]引入贝叶斯框架,根据不同视角对应关系的可靠性对其附加不同权重,降低了不正确对应关系给配准问题带来的误差,但累积误差的问题仍然存在。与此同时,基于概率的方法不断涌现。许多学者利用高斯混合模型^[26-27]来拟合数据分布,通过概率模型利用期望最大化方法生成数据点,最终得到多视角匹配结果。然而,对于一组包含较长尾或非典型观测到的数据集,使用 StMM^[28-29]来代替 GMM 将获得更稳健的配准结果。

随着研究的不断深入,基于相对运动的方法不断涌现,Govindu 等^[30]提出了运动平均方法,将两个点云之间的相对运动视为一组约束方程,从多个相对运动中估计多视角配准结果。与此同时,Arri-goni 等^[31]将低秩稀疏矩阵分解引入配准问题中,通过矩阵分解来从一组可靠的相对运动估计全局运动,该方法相对于运动平均方法具有更强的鲁棒性。

为加快求解速度,Zhang X.等^[32]在此基础上增加了一个角度约束,利用增广拉格朗日乘子进行求解,加快了运行时间,然而此类方法对近似矩阵非0元素的数量具有一定的要求。

时至今日,点云配准仍是一个有待深入探索的问题。点到平面误差度量的方法对于三维曲面的精细化配准非常精确,已广泛用于双视角配准方面,在多视角配准问题方面却鲜有使用。为此,本文提出了一种基于点到面误差度量的多视角配准方法,该方法根据初值构造物体粗糙模型,将点云逐帧与不完整模型进行匹配,在每帧点云的迭代过程中,提出高效的法向量转换策略以降低方法时间复杂度,并使用线性最小二乘法求解点云的配准参数,配准结果用以修正物体的粗糙模型与法向量集。通过交替进行点到面双视角配准和修正模型参数,该方法可实现高精度的多视角点云配准。

1 迭代最近点算法

双视角配准是多视角点云配准问题研究的基础。给定在某物体采集到的两帧点云——数据点云 $P = \{p_i\}_{i=1}^{M_p}$ 和模型点云 $Q = \{q_j\}_{j=1}^{M_q}$,双视角点云配准的目标是在这两帧点云中寻找最优的旋转和平移变换,使得两帧点云可以很好地匹配在一起。

在双视角配准问题中,最常用且有效的算法就是ICP算法。给定某物体的数据点云 P 与模型点云 Q ,基于点到点距离度量的迭代最近点方法的目标函数可表述为

$$\begin{cases} \arg \min_{\mathbf{R}, \mathbf{t}, q_{c(i)} \in Q} \sum_{i=1}^{M_p} \|\mathbf{R}p_i + \mathbf{t} - q_{c(i)}\|_2^2 \\ \text{s. t. } \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_3, \det(\mathbf{R}) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

式中: $(p_i, q_{c(i)})$ 是数据点云与模型点云之间的对应点对; $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{t}$ 分别表示作用于数据点集的旋转矩阵和平移向量。在理想情况下,对应点对中的两个点完全重叠时,即可完成两帧点云的正确匹配。从式(1)中可以看出,该算法旨在获取合适的点对关系以及旋转和平移变换,使得目标函数最小,从而得到较精确的点云配准结果。

给定点集的初始配准参数 $(\mathbf{R}_0, \mathbf{t}_0)$,该算法需要迭代执行以下两个步骤。

步骤1 对于数据点云中的每个点,在模型点云中搜索最近点,建立两帧待配准点云之间的点对关系

$$c_k(i) = \arg \min_{j \in \{1, 2, 3, \dots, M_q\}} \|\mathbf{R}_{k-1} p_i + \mathbf{t}_{k-1} - q_j\|_2 \quad (2)$$

步骤2 根据当前建立的点对关系,通过最小化所有对应点之间的点对距离更新刚体变换

$$(\mathbf{R}_k, \mathbf{t}_k) = \arg \min_{\mathbf{R}, \mathbf{t}} \sum_{i=1}^{M_p} \|\mathbf{R}p_i + \mathbf{t} - q_{c_k(i)}\|_2^2 \quad (3)$$

重复以上步骤,直至迭代数 k 超出预先设定的阈值 K 或刚体变换矩阵无明显变化时,停止迭代,输出刚体配准结果。

ICP算法可以有效地求解对应点云的配准问题,但它不能直接用于具有非重叠区域的点云之间的配准,这是因为位于非重叠区域的数据点在模型点集中不存在真正的对应点,如果将这些不正确的匹配也用于点云匹配中,将难以获得精确的配准结果。此外,在实际应用中,用于配准的数据点取自物体的几何表面,采用点到点误差度量的目标函数即使已收敛也不可能获得单个点的精确重叠,这将导致配准的误差。

2 基于点到面度量的点云配准方法

给定不同角度采集到的物体的 N 帧点云 $\{P_i\}_i^N$ ($P_i = \{p_{i,j}\}_{j=1}^{M_i}$) 以及初始配准参数 $\{\mathbf{R}_i^0, \mathbf{t}_i^0\}_{i=1}^N$,多视角点云配准的目标是计算精确的刚体配准参数 $\{\mathbf{R}_i, \mathbf{t}_i\}_{i=1}^N$,从而将不同坐标系下的点云数据统一到一个参考帧中,获得完整的立体模型。

假设物体的精确模型 Q 已知,依次将每帧点云作为数据点云与模型 Q 通过ICP算法进行配准,可得到多视角配准结果。由于基准帧点云的位置是准确的,所以从第二帧点云开始与精确模型进行匹配。由此,基于点到面的多视角配准方法可简化为最小二乘问题

$$\begin{cases} \arg \min_{\{\mathbf{R}_i, \mathbf{t}_i\}_{i=2}^N, q_{c(i,j)} \in Q_i} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{M_i} \|\mathbf{R}_i p_{i,j} + \mathbf{t}_i - q_{c(i,j)}\|_2^2 \\ \text{s. t. } (\mathbf{R}_i)^T \mathbf{R}_i = \mathbf{I}_3, \det(\mathbf{R}_i) = 1 \end{cases} \quad (4)$$

式中 $(p_{i,j}, q_{c(i,j)})$ 表示第 i 帧点云中数据点 $p_{i,j}$ 与在模型 Q 中搜寻得到的最近点 $q_{c(i,j)}$ 组成的对应点对。

式(4)采用点到点度量的ICP算法进行配准,然而ICP算法存在两个缺陷:①该算法假设所有点在模型点集中都存在对应点,数据点云或模型点云存在的缺失部分将给算法的精度和收敛性带来一定影响;②由于点云大多取自物体表面,点到点ICP算法并未考虑曲面的局部几何结构,由此导致无法获取单个点的精确重叠。考虑到这两个因素,本文提出目标函数

$$\begin{cases} \arg \min_{\{\mathbf{R}_i, \mathbf{t}_i\}_{i=2}^N, \{q_{c(i,j)}\}_{i=2}^N \in Q_i} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{M_i} (\omega_{i,j} ((\mathbf{R}_i \mathbf{p}_{i,j} + \mathbf{t}_i - q_{c(i,j)}) \mathbf{n}_{c(i,j)})^2) \\ \text{s. t. } (\mathbf{R}_i)^T \mathbf{R}_i = \mathbf{I}_3, \det(\mathbf{R}_i) = 1 \end{cases} \quad (5)$$

式中: $\omega_{i,j}$ 表示一个二值变量, 当 $p_{i,j}$ 与模型点集中的对应点 $q_{c(i,j)}$ 之间距离低于设定阈值时, $\omega_{i,j}$ 取 1, 否则取 0; $\mathbf{n}_{c(i,j)}$ 表示 $q_{c(i,j)}$ 近平面的法向量。该目标函数通过设置二值变量 $\omega_{i,j}$ 来降低非重叠区域对配准的影响, 通过最小化数据点与对应点处切平面的距离来实现配准, 以减少物体表面离散化对配准的影响, 如图 1 所示。

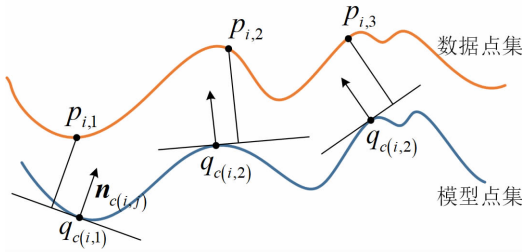


图 1 相似平面间的点到面误差

Fig. 1 Point-to-plane error between similar surfaces

多视角配准问题可分解成多个双视角子问题进行求解。然而, 在进行多视角配准之前, 并不能得到物体的精确模型, 因此只能根据初始参数 $\{\mathbf{R}_i^0, \mathbf{t}_i^0\}_{i=1}^N$ 构造物体的粗糙模型

$$P = \{\mathbf{R}_i^0 \mathbf{p}_{i,j} + \mathbf{t}_i^0\}_{i=1}^N, j=1}^{M_i} \quad (6)$$

对第 i 帧点云进行配准时, 要去除粗糙模型中的该帧点云数据, 从而得到不完整模型

$$Q_i = P \setminus \{\mathbf{R}_i^0 \mathbf{p}_{i,j} + \mathbf{t}_i^0\}_{j=1}^{M_i} \quad (7)$$

此时, 用不完整模型代替精确模型, 将该帧点云与不完整模型利用基于点到面度量的迭代最近点方法计算得到该帧点云的配准参数 $(\mathbf{R}_i^1, \mathbf{t}_i^1)$, 所得结果用以改进模型法向量集以及粗糙模型。依次遍历所有点云, 即可获得进一步修正的物体模型。由于该

方法进行双视角配准时使用不完整粗糙模型代替精确模型, 因此得到的配准结果精度有限。为获得较为精确的多视角配准结果, 必须进行多次迭代。

为求解目标函数, 本文采用如图 2 所示的逐步求精策略, 有效地将多视角配准问题划分成若干个双视角配准子问题。图中, X_i 表示第 i 帧点云在当前坐标系下的点集, 绿色箭头代表双视角匹配。利用初值构造粗糙模型, 依次遍历除基准帧以外的每帧点云, 使其与去除该帧点云后的不完整粗糙模型进行双视角配准, 得到该帧点云的配准参数, 用以修正粗糙模型。依次遍历完所有点云后, 还需进行多次迭代, 最终得到多视角点云的配准结果。

在进行多视角配准时, 需要考虑一个问题, 即在双视角配准过程中, 模型点集是不发生改变的, 但是多视角问题中用以配准的模型点集将随点云的修正而不断发生变化。若每进行一帧点云的配准都需求解不完整模型 Q 中每个点平面处的法向量, 将不可避免地造成方法的计算复杂度升高。为此, 本文提出了一个有效的法向量转换策略来降低方法的运行时间。

2.1 法向量求解策略

对于点云数据中的一个点 $q_{i,j}(x_0, y_0, z_0)$, 可以用特征值和法线两种信息描述它的局部几何结构。给定一个支持半径 l , 对于该半径内的任意一点 $q_{i,j}(x_k, y_k, z_k)$, 可建立一个 3×3 的协方差矩阵 $\mathbf{C}_{i,j}$

$$\mathbf{C}_{i,j} = \frac{1}{|S_{i,j}|} \sum_{q_{i,j,k} \in S_{i,j}} \mathbf{A} \mathbf{A}^T \quad (8)$$

式中: $k=1, 2, 3, \dots$; $\mathbf{A} = [x_k - x_0, y_k - y_0, z_k - z_0]^T$; $S_{i,j} = \{q_{i,j,k} \mid \|q_{i,j,k} - q_{i,j}\| \leq l\}$ 代表支持半径 l 内所有点的集合。在实验中, 通常会设置一个数量阈值, 如果该半径内点数小于数量阈值, 则进行过滤, 以此来降低离群值的影响。

对矩阵 $\mathbf{C}_{i,j}$ 进行奇异值分解 (SVD), 将得到 3

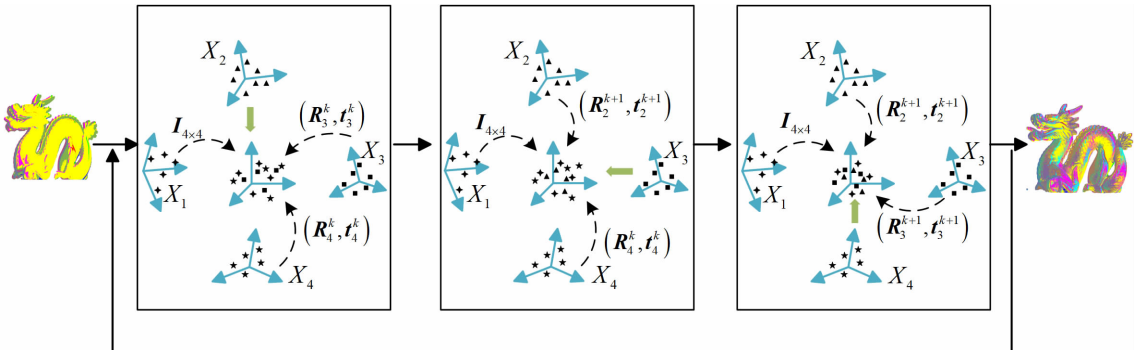


图 2 基于点到面度量的逐步求精多视角配准方法原理

Fig. 2 The stepwise refinement framework of the multi-view registration based on point-to-plane measurement

个特征值 $\lambda_{i,j,1} > \lambda_{i,j,2} > \lambda_{i,j,3}$ 以及特征值对应的特征向量 $\mathbf{n}_{i,j,1}$ 、 $\mathbf{n}_{i,j,2}$ 、 $\mathbf{n}_{i,j,3}$ 。通常情况下,当支持半径较小时,以点 $q_{i,j}$ 为圆心、半径为 l 范围内所包含的点可近似视为位于同一平面上。在较大特征值 $\lambda_{i,j,1}$ 以及 $\lambda_{i,j,2}$ 对应的特征向量方向上,数据点分布较为离散,而数据点在 $\mathbf{n}_{i,j,3}$ 方向上则较为稳定。因此,可将数据点周围点计算所得较小特征值对应的特征向量 $\mathbf{n}_{i,j,3}$ (当指向视点反方向时取 $-\mathbf{n}_{i,j,3}$) 视为该点附近平面的法向量 $\mathbf{n}_{i,j}$,用以描述该点的局部几何结构。

在获得所有数据点处的平面法向量后,需根据初值 $\{\mathbf{R}_i^0, \mathbf{t}_i^0\}_{i=1}^N$ 对法向量进行旋转转换,得到全局坐标系下的所有点的法向量集合

$$N' = \{\mathbf{R}_i^0 \mathbf{n}_{i,j}\}_{i=1, j=1}^{N, M_i} \quad (9)$$

在进行第 k 次迭代中第 i 帧点云配准时,不完整模型 Q_i 中点的法向量可表示为 $N'_i = N' \setminus \{\mathbf{R}_i^{k-1} \mathbf{n}_{i,j}\}_{j=1}^{M_i}$,使用 k -d 树^[33] 搜索找到对应点之后将直接得到该点平面处的法向量,通过双视角匹配计算得到该帧点云的配准参数 $\{\mathbf{R}_i^k, \mathbf{t}_i^k\}$,用以更新粗糙模型所有点的局部平面法向量集合

$$N' = N'_i \cup \{\mathbf{R}_i^k \mathbf{n}_{i,j}\}_{j=1}^{M_i} \quad (10)$$

2.2 基于点到面度量的迭代最近点方法

从图2可以看出,多视角点云配准方法的关键在于单帧点云 P_i 与粗糙模型 Q_i 之间的双视角配准问题,点云 P_i 的刚体变换参数 $(\mathbf{R}_i, \mathbf{t}_i)$ 可以通过求解如下目标函数后得到

$$\begin{cases} \arg \min_{\mathbf{R}_i, \mathbf{t}_i, q_{c(i,j)} \in Q_i} \sum_{j=1}^{M_i} (\omega_{i,j} ((\mathbf{R}_i \mathbf{p}_{i,j} + \mathbf{t}_i - q_{c(i,j)}) \mathbf{n}_{c(i,j)})^2) \\ \text{s. t. } (\mathbf{R}_i)^T \mathbf{R}_i = \mathbf{I}_3, \det(\mathbf{R}_i) = 1 \end{cases} \quad (11)$$

为估计点云的刚性变换关系,可将配准参数记为一个 4×4 的刚性变换矩阵

$$\mathbf{\Theta}_i = \mathbf{t}(t_{i,x}, t_{i,y}, t_{i,z}) \mathbf{R}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = \mathbf{t}(t_{i,x}, t_{i,y}, t_{i,z}) \mathbf{R}_z(\gamma_i) \mathbf{R}_y(\beta_i) \mathbf{R}_x(\alpha_i) \quad (12)$$

式中 $\mathbf{R}_x(\alpha_i)$ 、 $\mathbf{R}_y(\beta_i)$ 、 $\mathbf{R}_z(\gamma_i)$ 分别指围绕 x 轴、 y 轴、 z 轴旋转相应的角度 α_i 、 β_i 、 γ_i 。

目标函数式(11)本质上是一个最小二乘优化问题,只需确定 α_i 、 β_i 、 γ_i 、 $t_{i,x}$ 、 $t_{i,y}$ 、 $t_{i,z}$ 这6个参数,即可完成该问题的优化求解。然而,由于 α_i 、 β_i 和 γ_i 是旋转矩阵 $\mathbf{R}_i$ 中的非线性三角函数参数,不能简单地通过线性最小二乘技术求解,复杂度较高。当两个输入面之间的相对方向变化很小时,可以用线性最小二乘逼近非线性优化问题。

当 $\theta \approx 0^\circ$ 时,可以使用近似值 $\sin \theta \approx \theta$ 以及 $\cos \theta \approx 1$ 。在方法每次迭代更新矩阵 $\mathbf{\Theta}_i$ 时, $\mathbf{R}_i$ 的相对方向变化很小,因此可以将 $\mathbf{\Theta}_i$ 重新表示为

$$\mathbf{\Theta}_i = \mathbf{t}(t_{i,x}, t_{i,y}, t_{i,z}) \hat{\mathbf{R}}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_i & \beta_i & t_{i,x} \\ \gamma_i & 1 & -\alpha_i & t_{i,y} \\ -\beta_i & \alpha_i & 1 & t_{i,z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

使用 $\hat{\mathbf{\Theta}}_i$ 代替 $\mathbf{\Theta}_i$ 后,目标函数可以重新表示为

$$\hat{\mathbf{\Theta}}_i^k = \arg \min_{\hat{\mathbf{\Theta}}_i} \sum_{i=1}^{M_p} (\omega_{i,j} ((\hat{\mathbf{\Theta}}_i^{k-1} \mathbf{p}_{i,j} - q_{c(i,j)}) \mathbf{n}_{c(i,j)})^2) \quad (14)$$

此线性最小二乘问题可以通过 SVD 分解^[18] 的方法求解。需要注意的是 $\hat{\mathbf{R}}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ 可能不是一个有效的旋转矩阵,需将 $\hat{\mathbf{\Theta}}_i^k$ 还原为 $\mathbf{\Theta}_i$ 。

2.3 方法实现

在第 i 帧点云与不完整模型 Q 之间进行双视角配准过程中,给定配准参数 $(\mathbf{R}_i^0, \mathbf{t}_i^0)$ 、重叠百分比 ξ_0 以及调控参数 λ ,基于点到平面度量的迭代最近点方法步骤如下。

步骤1 根据式(15)建立两帧待配准点云之间的点对关系

$$c_k(i, j) = \arg \min_{c(i, j) \in \{1, 2, 3, \dots, M_q\}} \|\mathbf{R}_i^{k-1} \mathbf{p}_{i,j} + \mathbf{t}_i^{k-1} - q_{c(i,j)}\|_2 \quad (15)$$

将点对基于距离从小到大进行排序。

步骤2 通过最小化加权点对距离得到重叠百分比 ξ_k 以及裁剪后的点云 P_{ξ_k}

$$(\xi_k, P_{\xi_k}) = \arg \min_{\xi, P_{\xi}} \sum_{\mathbf{p}_i \in P_{\xi_{k-1}}} \|\mathbf{R}_i^{k-1} \mathbf{p}_{i,j} + \mathbf{t}_i^{k-1} - q_{c_k(i,j)}\|_2^2 / (|P_{\xi_{k-1}}| \xi_{k-1}^{\lambda}) \quad (16)$$

步骤3 根据步骤2中建立的点对关系,最小化目标函数式(11)更新刚体变换参数 $(\mathbf{R}_i, \mathbf{t}_i)$

$$\begin{cases} \arg \min_{\mathbf{R}_i, \mathbf{t}_i, q_{c(i,j)} \in Q_i} \sum_{j=1}^{M_i} (\omega_{i,j} ((\mathbf{R}_i \mathbf{p}_{i,j} + \mathbf{t}_i - q_{c(i,j)}) \mathbf{n}_{c(i,j)})^2) \\ \text{s. t. } (\mathbf{R}_i)^T \mathbf{R}_i = \mathbf{I}_3, \det(\mathbf{R}_i) = 1 \end{cases} \quad (17)$$

式中

$$\omega_{i,j} = \begin{cases} 0, & \mathbf{p}_{i,j} \notin P_{\xi_k} \\ 1, & \mathbf{p}_{i,j} \in P_{\xi_k} \end{cases} \quad (18)$$

迭代执行以上3个步骤,当迭代次数 k 达到预先设定的阈值 K 或刚体变换矩阵无明显变化时,即可输出刚体配准参数。

式(15)是搜索最近点问题,可以使用基于 k -d

树^[33]的搜索方法解决,该方法会直接得到对应点对的索引以及点对距离。可根据式(16)得到重叠百分比以及裁剪后的数据点云。在求解目标函数式(17)时, $q_{c(i,j)}$ 和 $n_{c(i,j)}$ 具有相同的索引,在获得点的对应关系后,将直接得到该点处平面的法向量,用以最小化该帧点云与不完整模型的点到平面误差。

基于点到面的多视角配准方法伪代码如下。
输入. 点云数据 $\{P_i\}_i^N$,初始参数 $\Theta_0=\{\mathbf{R}_i^0,\mathbf{t}_i^0\}_{i=1}^N$;
输出. 更新后的模型 $\Theta=\{\mathbf{R}_i,\mathbf{t}_i\}_{i=1}^N$;
根据式(8)计算数据点处平面法向量;
根据式(6)构造粗糙模型;
Do while
 $v=v+1$;
 for $i=2:N$
 构造不完整模型 Q_i 和其中点处法向量集 N'_i ;
 利用 Q_i 建立 k -d 树;
 Do while
 $k=k+1$;
 根据式(15)建立点对关系 $(p_{i,j},q_{c(i,j)})$;
 根据式(16)对点云进行裁剪;
 最小化目标函数式(17)计算最新刚体变换矩阵 Θ_i^k ;
 Until $k\leq K$ 或 Θ_i^k 无明显变化;
 更新模型 $P=Q_i\cup\{\mathbf{R}_i^k p_{i,j}+\mathbf{t}_i^k\}_{j=1}^{M_i}$ 和模型点局部法向量集合 $N'=N'_i\cup\{\mathbf{R}_i^k n_{i,j}\}_{j=1}^{M_i}$
 end for
 Until $v<100$ 或配准误差小于设定值

2.4 复杂度分析

点集数量 N 和每个点集中点的数量 M_i 是复杂度的中心量。为了便于分析,假设程序主体共迭代了 T 次,每帧点云配准时的迭代次数为 K 。在程序主体进行之前,需要计算粗糙模型以及每帧点云的法向量,复杂度均为 $O(M_i)$,需执行 N 次。在单帧点云配准迭代之前,需要构造不完整模型并且计算不完整模型中点处平面的法向量,复杂度均为 $O(M_i)$,同时需要为不完整模型中的点建立 k -d 树以加速搜索,设不完整模型中点的数量为 $M'_i=M-M_i$,复杂度为 $O(M'_i\lg M'_i)$ 。在单帧点云配准时,基于 k -d 树结构,为该帧点云与目标点云建立点对关系,复杂度为 $O(M_i\lg M'_i)$,根据点对距离进行点云裁剪,复杂度为 $O(\lg M_i)$ 。估计刚体变换复杂度为 $O(M_i)$ 。在单帧点云配准完成后,需要修正物体的粗糙模型以及法向量集,时间复杂度均为 $O(M_i)$ 。表 1 列出了多视角点云配准方法的总计算复杂度。

表 1 多视角点云配准方法的复杂度

Table 1 Complexity analysis of multi-view registration

操作	计算复杂度	执行次数
计算法向量集	$O(M_i)$	N
构造粗糙模型	$O(M_i)$	N
构造不完整模型	$O(M_i)$	$T(N-1)$
计算不完整法向量集	$O(M_i)$	$T(N-1)$
建立 k -d 树	$O(M'_i\lg M'_i)$	$T(N-1)$
建立点对关系	$O(M_i\lg M'_i)$	$T(N-1)K$
裁剪点云	$O(\lg M_i)$	$T(N-1)K$
计算刚体变换	$O(M_i)$	$T(N-1)$
K 更新粗糙模型	$O(M_i)$	$T(N-1)$
更新法向量集	$O(M_i)$	$T(N-1)$

3 实验结果

为验证本文多视角配准方法的性能,将该方法在斯坦福大学图形实验室公开的 4 个数据集(Armadillo、Bunny、Buddha、Dragon)^[34]上进行了测试,并与当下较为流行的方法进行了对比。这些数据集都是从一个对象的不同视角中得到的,并且点云之间的变换只有刚性变换。为更加准确地配准,将数据点的坐标值放大 1 000 倍。Armadillo、Bunny、Buddha、Dragon 数据集的点云帧数分别为 12、10、15、15,点总数分别为 307 625、362 272、1 099 005、469 193。为减少配准时间,所有的数据集都被均匀地降采样到大约 2 000 点。

以旋转矩阵误差和平移向量误差评估实验效果。旋转误差和平移误差分别定义为

$$\begin{cases} e_R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \| \mathbf{R}_{m,i} - \mathbf{R}_{g,i} \|_F \\ e_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \| \mathbf{t}_{m,i} - \mathbf{t}_{g,i} \|_F \end{cases} \quad (19)$$

式中 $\{\mathbf{R}_{g,i},\mathbf{t}_{g,i}\}$ 和 $\{\mathbf{R}_{m,i},\mathbf{t}_{m,i}\}$ 分别表示第 i 个刚体变换的实际真值和估计真值。

所有的测试方法均在 Matlab R2021a 实现,并且都使用 k -d 树^[33]方法搜索最近点。实验在一台 16 GB 内存、6 核 3.10 GHz 的计算机上进行。

3.1 双视角配准

由于本文提出多视角方法在很大程度上取决于双视角配准方法的运算性能,因此有必要对双视角配准方法的效率、精度、收敛性等情况进行进一步的说明。为此,将本文逐步求精策略使用的双视角配准方法与使用安德森加速的 ICP 方法(AAICP)^[14]、

稀疏 ICP 方法 (SpICP)^[10] 以及裁剪 ICP 方法 (TrICP)^[8] 进行了效率和精度方面的比较。用于双视角配准的数据为每组数据集的前两帧点云。

3.1.1 精度与效率

给定相应的初始参数,在不同数据集上使用 4 种方法进行配准,结果如表 2 所示。可以看出,本文采用的双视角配准方法在精度方面具有较大的优势,在 Bunny、Buddha、Dragon 数据集上总能实现最

精确的配准,在 Armadillo 数据集上,效果和 SpICP 不相上下,但是效率远高于 SpICP。这是因为在实际应用中,用于配准的数据点往往取自几何表面,物体表面的不同离散化导致了其他 3 种方法的配准误差。但是,SpICP 方法将配准问题表示为稀疏优化,降低了对异常值和缺失数据的敏感性。虽然配准效果有了一定的提升,但始终存在点对不能精确重叠的弊端。

表 2 不同双视角点云配准方法的结果对比

Table 2 Comparison results of different pair-wise registration methods

数据集	初值		AAICP			SpICP			TrICP			本文方法		
	e_R	e_t	T/s	e_R	e_t	T/s	e_R	e_t	T/s	e_R	e_t	T/s	e_R	e_t
Armadillo	0.015 0	1.063 9	0.024 2	0.001 5	0.672 0	0.510 2	0.000 4	0.598 6	0.026 9	0.001 4	0.666 5	0.010 3	0.000 3	0.643 7
Bunny	0.016 2	1.859 1	0.043 6	0.002 4	0.149 7	0.872 4	0.002 3	0.229 9	0.031 3	0.001 3	0.129 1	0.012 3	0.000 2	0.021 0
Buddha	0.015 0	1.545 8	0.026 4	0.005 6	0.853 5	0.540 9	0.002 5	0.832 5	0.027 6	0.006 0	0.849 6	0.013 9	0.002 3	0.831 7
Dragon	0.014 3	1.202 4	0.027 8	0.001 9	0.661 2	0.470 5	0.001 2	0.658 6	0.026 3	0.002 1	0.664 3	0.010 1	0.001 0	0.643 9

注:表中加粗数据为最优值。

在效率方面,不同双视角配准方法的运行时间对比如图 3 所示,图中每个数据集的 100% 运行时间分别对应 0.510 2、0.872 4、0.540 9、0.470 5 s。可以看出,本文使用的双视角方法运行速度最快。

敛速度相对于其他 3 种方法中收敛最快的 SpICP 方法提高了 30%。

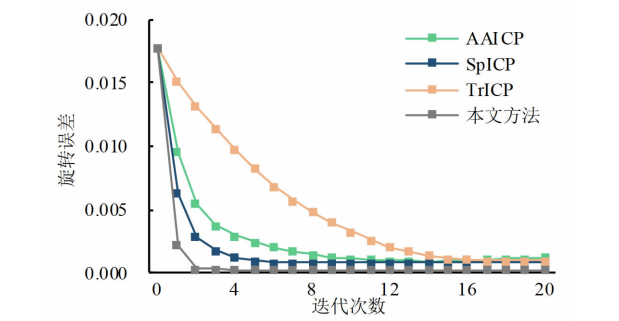
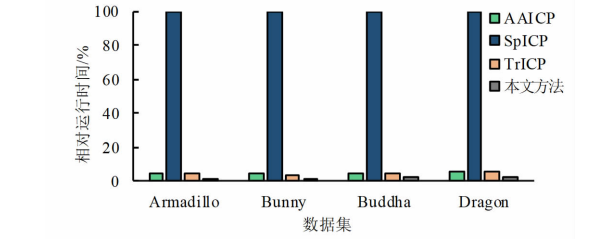


图 3 不同双视角配准方法的运行时间对比

Fig.3 Comparison of relative runtime of different pair-wise registration methods

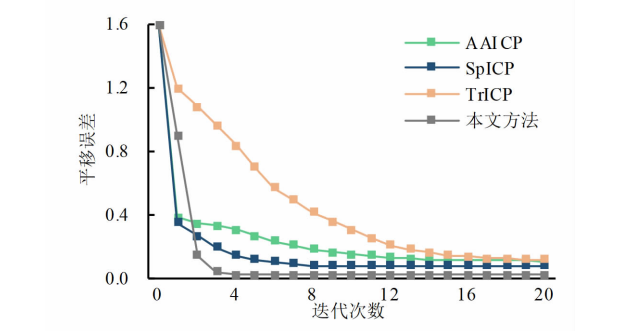
对于本文的双视角配准方法,除了主程序迭代耗时之外,还要考虑方法运行前的法向量计算耗时。Armadillo、Bunny、Buddha、Dragon 这 4 个不同数据集下的法向量计算耗时分别为 0.064 4、0.063 8、0.068 6、0.065 5 s。可以看出,当数据集中点的数量一定时,计方法向量的时间大致相同,尽管如此,本文方法的运行时间仍远少于 SpICP 方法。

(a) 旋转误差

综合本小节分析可知,本文方法在准确性和效率上都有很好的表现。

3.1.2 收敛性

为验证本文双视角配准方法的收敛性,将本文方法与其他 3 种方法在 Bunny 数据集上进行了测试,结果如图 4 所示。分析结果可知,本文方法的收



(b) 平移误差

图 4 Bunny 数据集中不同双视角配准方法的收敛性分析
Fig.4 Convergence analysis of different pair-wise registration methods under Bunny data set

从图 4 可知:点到面度量方法在第 5 次迭代时

已基本收敛;TrICP 方法在第 18 次迭代时开始收敛,优于 AAICP 和 SpICP 的收敛速度;本文方法的配准精度明显高于其他 3 种方法;AAICP 基于安德森加速的思想对 TrICP 进行了加速,收敛速度有所提高。SpICP 方法将配准问题表示为稀疏优化,降低了对异常值和缺失数据的敏感性,配准效果有了一定的提升,但始终存在点对不能精确重叠的弊端。本文提出的配准方法用最小化点沿目标曲面法线的误差来代替 TrICP 方法中的最小化点对距离步骤,考虑了目标点云的局部几何结构,配准精度高且不易陷入局部最优,因此可以获得更为精确、快速的点云匹配结果。由此可见,使用点到面误差度量的配准方法可以快速实现两帧点云之间的高精度配准。

3.2 多视角配准

为验证本文多视角配准方法的有效性,将本文方法与基于 K -means 的方法^[24](后文简称 K -means)、使用 TrICP 的运动平均方法(MATrICP)^[30]、正态

分布变换方法(NDT)^[9]以及逐步求精的多视角配准方法(Con2Fin)^[22]这 4 种较为先进的方法进行比较。

3.2.1 精度与效率

表 3 展示了不同方法在 4 个数据集上进行匹配的结果。为了更加直观地查看对比结果,图 5 以截面的形式展示了所有多视角配准的结果。从表 3 可以看出:对于 Armadillo 和 Bunny 数据集,本文方法总能获得较为精确的配准结果;对于 Buddha 和 Dragon 数据集,本文方法可以有效获得高精度的旋转矩阵,平移向量误差相对较大。这是因为本文采用的点到平面误差度量方法通过最小化数据点与其对应点处切平面之间的平方距离之和来实现点云之间的匹配,通过不惩罚数据点沿曲面的偏移来解决离散化问题,在获取精确旋转变换的同时导致了一定的平移误差。尽管如此,本文方法的配准结果都优于 K -means、NDT 和 Con2Fin 的配准结果。

表 3 不同多视角点云配准方法的配准精度对比

Table 3 Comparison of registration errors of different multi-view methods

数据集	初值		K-means		MATrICP		NDT		Con2Fin		本文方法	
	e_R	e_t	e_R	e_t	e_R	e_t	e_R	e_t	e_R	e_t	e_R	e_t
Armadillo	0.037 1	2.426 2	0.011 5	1.107 5	0.033 6	4.291 5	0.009 8	1.658 9	0.017 9	1.553 2	0.006 9	0.964 1
Bunny	0.039 7	1.848 5	0.014 6	0.778 5	0.012 4	0.718 1	0.011 3	1.081 1	0.010 0	0.688 0	0.006 6	0.488 2
Buddha	0.040 3	1.493 4	0.020 8	1.027 6	0.012 0	0.858 1	0.024 4	2.988 0	0.018 1	1.478 4	0.011 5	1.217 6
Dragon	0.039 2	1.729 5	0.018 9	1.614 0	0.018 9	1.103 7	0.021 9	1.980 6	0.014 1	1.544 5	0.007 2	1.301 2

注:表中加粗数据为最优值。

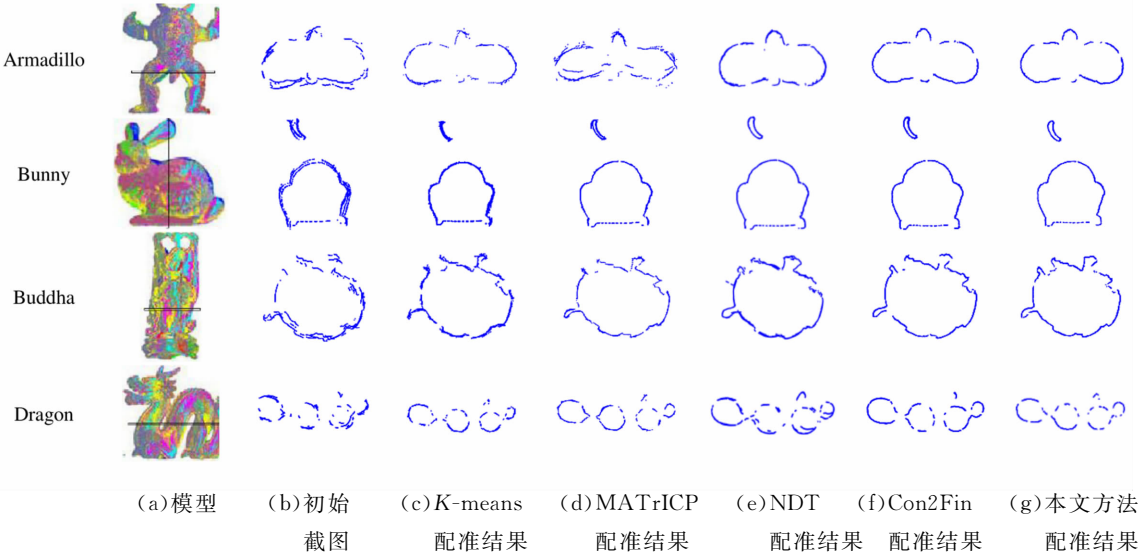


图 5 多视角配准结果截面图

Fig. 5 Multi-view registration results in the form of cross-section

在效率方面,不同方法在不同数据集上的运行时间如表 4 所示。可以看出,除 NDT 方法外,4 种

方法运行效率相当。

表 4 不同多视角点云配准方法的运行时间对比
Table 4 Comparison of runtimes of different multi-view methods 单位:s

数据集	K-means	MATrICP	NDT	Con2Fin	本文方法
Armadillo	5.281 1	59.281 7	24.590 8	11.299 4	10.800 3
Bunny	6.518 7	32.837 3	15.384 5	5.318 1	5.267 6
Buddha	14.470 7	79.761 3	42.562 0	23.995 9	28.085 7
Dragon	10.697 9	68.230 8	21.103 1	26.358 8	23.201 4

为实现多视角配准,基于 K -means 的方法依次遍历每个点集,然后交替进行聚类 and 刚性变换估计。在聚类操作中,该方法将数据点划分为预设定的聚类数,利用聚类的质心表示该聚类中所有的数据点,这将不可避免地造成信息的丢失,尽管非常有效,但由于信息丢失,配准精度较低。MATrICP 方法从成对配准估计的一组相对运动中得到所有全局运动,但该方法对不可靠的相对运动很敏感,即使是一个不可靠的相对运动也会导致多视角配准的失败。如表 3 所示,对于 Armadillo 数据集,由于输入了不可靠的相对运动,所以该方法并未能成功获得配准结果。NDT 方法将目标点集细分为正则化单元,并通过正态分布建模以估计数据点属于这个单元的概率,然而在实际应用中,数据点分布不均匀从而导致大部分稀疏数据点无法得到利用,因此 NDT 方法难以获得预期的结果。Con2Fin 方法采用传统的 TrICP 方法来处理双帧点云的配准问题,如 3.1 小

节所述,该方法精度上比不上本文提出的配准方法。

本文提出的多视角配准方法通过逐步求精的策略将多视角配准问题分解成多个双视角配准问题来进行求解,每次程序主体运行之前,在进行求解法向量的同时对离群点的进行过滤。在进行单帧点云的每次迭代过程中,该方法基于点对距离对点云进行了裁剪,排除掉非重叠区域对配准的影响。在估计刚性变换阶段,通过最小化点沿目曲面法线的误差,代替最小化点对距离来获取更为精确的配准结果。通过多次迭代,该方法可以获得更为准确的多视角配准结果。

3.2.2 鲁棒性

为了说明鲁棒性,将 5 种方法在较低高斯噪声 ($\text{SNR}=50\text{ dB}$) 和较高高斯噪声 ($\text{SNR}=25\text{ dB}$) 环境中进行了测试。为消除随机性,每组实验都进行 30 次独立实验,结果如表 5 和表 6 所示,表中数据以“平均值 $\pm$ 标准差”形式展示。

表 5 较低高斯噪声 ($\text{SNR}=50\text{ dB}$) 下的配准结果

Table 5 Comparison of registration results under low Gaussian noise (SNR=50 dB)					
方法	指标	数值			
		Armadillo	Bunny	Buddha	Dragon
K -means	e_R	0.008 9±0.000 6	0.014 6±0.000 5	0.019 9±0.000 7	0.020 0±0.000 8
	e_t	2.344 8±0.108 6	1.693 6±0.062 8	1.068 4±0.055 9	1.515 8±0.072 4
MATrICP	e_R	0.030 4±0.006 6	0.011±9 0.000 5	0.012 2±0.000 3	0.016 0±0.000 4
	e_t	4.014 6±0.488 9	0.699 6±0.026 5	0.842 4±0.016 8	1.053 4±0.044 9
NDT	e_R	0.008 9±0.000 7	0.008 5±0.000 3	0.026 9±0.000 8	0.147 9±0.002 1
	e_t	1.482 6±0.034 6	1.305 6±0.076 2	2.673 8±0.029 1	2.421 5±0.184 7
Con2Fin	e_R	0.014 2±0.002 8	0.012 4±0.000 7	0.011 0±0.002 1	0.013±0 0.000 6
	e_t	1.380 7±0.142 2	0.512 7±0.037 1	1.299 4±0.044 6	1.787 0±0.031 4
本文方法	e_R	0.006 8±0.000 3	0.005 1±0.000 1	0.006 3±0.000 4	0.005 9±0.000 2
	e_t	1.080 4±0.014 8	0.485 4±0.010 5	1.044 5±0.013 3	1.275 9±0.012 6

注:表中加粗数据为最优值。

从表 5 和表 6 可以看出,配准精度随着噪声的增加而递减。在相同的噪声水平下,对于 Armadillo 和 Bunny 数据集,所提方法总能得到最佳的配准结

果。对于 Buddha 和 Dragon 数据集,所提方法可以得到较好的旋转矩阵,但配准的平移向量误差较大,但优于 K -means、NDT 和 Con2Fin 的效果。

表 6 较高高斯噪声(SNR=25 dB)下的配准结果
Table 6 Comparison of registration results under high Gaussian noise (SNR=25 dB)

方法	指标	数值			
		Armadillo	Bunny	Buddha	Dragon
K-means	e_R	0.009 5±0.000 9	0.015 0±0.000 7	0.020 1±0.001 2	0.021 3±0.001 1
	e_t	2.469 8±0.110 9	1.704 3±0.071 6	1.121 2±0.086 6	1.391 3±0.109 9
MATrICP	e_R	0.028 9±0.0073	0.011 9±0.000 6	0.012 1±0.000 4	0.016 2±0.000 5
	e_t	3.876 4±0.565 5	0.704 7±0.033 7	0.843 3±0.018 8	1.046 4±0.055 9
NDT	e_R	0.009 9±0.001 3	0.008 1±0.000 5	0.025 6±0.001 6	0.017 5±0.002 8
	e_t	1.532 6±0.116 7	1.272 7±0.054 7	2.594 4±0.092 5	2.338 4±0.275 4
Con2Fin	e_R	0.029 3±0.015 0	0.012 4±0.000 7	0.011 1±0.002 4	0.013 7±0.003 0
	e_t	2.726 0±1.288 7	0.512 7±0.037 1	1.266 7±0.067 6	1.810 8±0.140 3
本文方法	e_R	0.005 8±0.001 0	0.005 1±0.000 1	0.007 5±0.002 2	0.009 0±0.000 9
	e_t	0.920 2±0.049 8	0.485 4±0.010 5	1.115 9±0.079 6	1.387 5±0.072 3

注:表中加粗数据为最优值。

对于带有噪声的数据集,基于 K-means 的方法利用点的聚类来实现多视角配准,噪声会影响聚类效果,配准结果也会因此受到影响。MATrICP 方法从一系列相对运动中得到配准结果,虽然噪声的增加会降低配准的精度,但运动平均方法可以消除噪声对配准的影响,具有较高的鲁棒性,因此该方法的配准结果较为稳定。但是,增加的噪声可能会导致不可靠的相对运动,从而导致一些不理想的配准结果。NDT 方法使用一个 NDT 来表示每个划分的单元中的数据点,不易受到噪声的影响,具有一定的鲁棒性,但该方法始终存在固定划分导致数据点信息丢失的问题,因此配准结果精度差,稳定性低。Con2Fin 方法在进行双视角配准子问题的求解过程中并未考虑噪声的影响,在较高噪声的情况下,鲁棒性较差。本文方法在求解目标点平面法向量时,对离群值进行了过滤,同时采用逐步求精的策略逐步修正配准参数,通过多次迭代,最终获得了较为准确的配准结果,具有较高的鲁棒性。

3.2.3 三维场景重建

为验证本文多视角配准方法的实际应用能力,在 EXBI 数据集^[35]上进行了测试。该数据集包含由 KiNect 传感器记录的 10 个 RGB-D 扫描,任意两帧点集都包含高重叠百分比。对于场景重建,所有方法都只处理距离信息,颜色信息用以辅助最终评估。在给定初始刚性变换的情况下,利用各种配准方法实现多视角匹配,得到三维重建结果,如图 6 所示。可以看出,本文方法在所有对比方法中获得了最准确的场景重建结果。

为实现三维点云配准,基于 K-means 的方法通过聚类来实现点云之间的匹配,该方法运行效率高,但由于聚类会导致信息缺失,造成该方法配准精度不高。MATrICP 方法在一组相对运动中得到全局运动,由于 EXBI 数据集的重叠百分比很高,包含更多可靠的相对运动,因此该方法可以获得较为准确的配准结果。NDT 方法用正态分布拟合目标点集的每一个小单元,但由于不均衡的分割,存在较多无效 NDT,配准精度不高。Con2Fin 方法通过 TrICP 来依次进行点云之间的匹配,配准精度较高,多次迭代后可以得到较为精确的配准结果。本文方法通过最小化点对之间的点到切面误差来降低曲面离散化对配准的影响,并通过逐步求精的策略对配准参数进行修正,配准效果较好。由于原始数据存在噪声,所以本文对重建结果进行了去噪处理,结果如图 6(h)所示。

综合本小节分析可知,本文方法可应用于三维重建。

4 结 论

本文提出了一种基于点到面误差度量的多视角点云配准方法。该方法将粗糙模型近似为精确模型,将点云逐帧与粗糙模型进行配准,在每次迭代过程中使用点到面度量的双视角配准方法,配准结果用于修正物体的粗糙模型,通过迭代执行双视角配准和模型修正,最终实现多视角点云配准。在公开数据集上的实验结果表明,本文方法可以有效实现多视角点云的精确配准,在三维重建方面有一定的

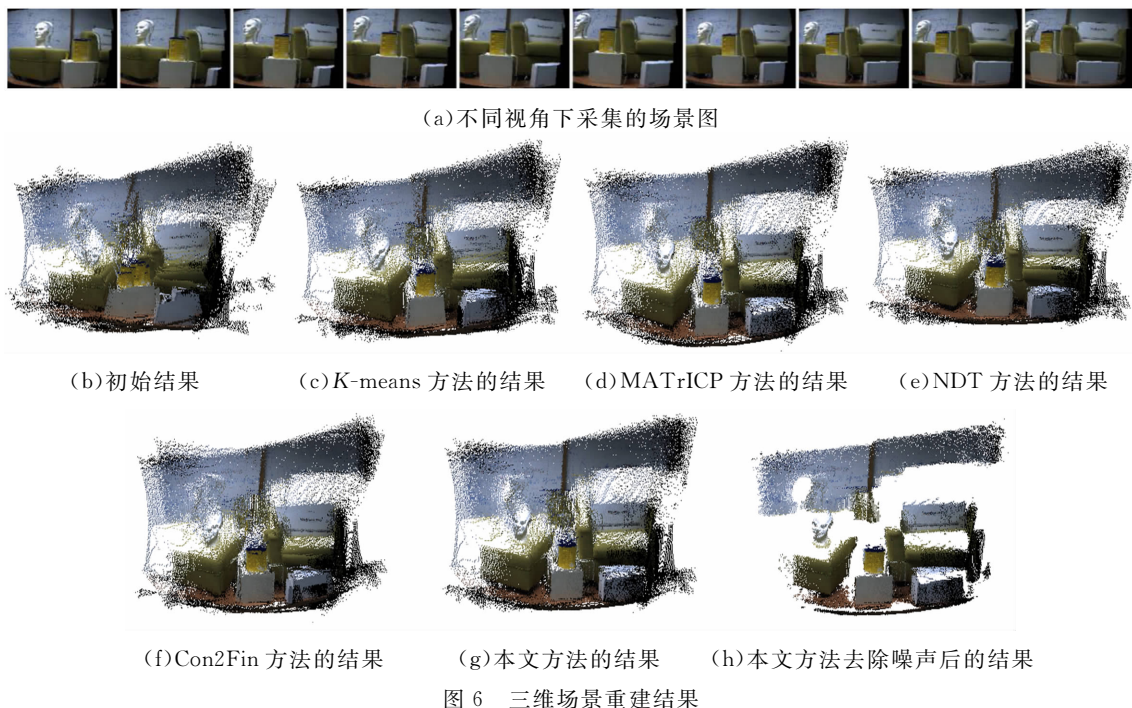


图 6 三维场景重建结果

Fig. 6 Scene reconstruction results of different methods

前景。后续研究将继续关注该方法的现实应用,以期待开发出较为完备的三维场景重建系统,以满足机器人制图、医学影像处理等实际需求。

参考文献:

- [1] SUN Jing, SUN Zhanli, LAM K M, et al. A robust point set registration approach with multiple effective constraints [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2020, 67(12): 10931-10941.
- [2] 林伟, 孙殿柱, 李延瑞, 等. 形貌约束的多视角点云分阶配准方法 [J]. 西安交通大学学报, 2020, 54(6): 75-81.
- [3] LIN Wei, SUN Dianzhu, LI Yanrui, et al. A hierarchical registration method of multiview point clouds with shape constraints [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2020, 54(6): 75-81.
- [4] PAVAN N L, DOS SANTOS D R, KHOSHELHAM K. Global registration of terrestrial laser scanner point clouds using plane-to-plane correspondences [J]. Remote Sensing, 2020, 12(7): 1127.
- [5] FANG Bin, MA Jie, AN Pei, et al. Multi-level height maps-based registration method for sparse LiDAR point clouds in an urban scene [J]. Applied Optics, 2021, 60(14): 4154-4164.
- [6] LIN Zhiyang, ZHU Jihua, JIANG Zutao, et al. Merging grid maps in diverse resolutions by the context-based descriptor [J]. ACM Transactions on Internet

Technology, 2021, 21(4): 91.

- [6] 陆世东, 涂美义, 罗小勇, 等. 基于图优化理论和GNSS激光SLAM位姿优化算法 [J]. 激光与光电子学进展, 2020, 57(8): 208-217.
- [7] LU Shidong, TU Meiyi, LUO Xiaoyong, et al. Laser SLAM pose optimization algorithm based on graph optimization theory and GNSS [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2020, 57(8): 208-217.
- [8] BESL P J, MCKAY N D. A method for registration of 3-D shapes [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14(2): 239-256.
- [9] CHETVERIKOV D, SVIRKO D, STEPANOV D, et al. The trimmed iterative closest point algorithm [C] // 2002 International Conference on Pattern Recognition. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2002: 545-548.
- [10] MAGNUSSON M, LILIENTHAL A, DUCKETT T. Scan registration for autonomous mining vehicles using 3D-NDT [J]. Journal of Field Robotics, 2007, 24(10): 803-827.
- [11] BOUAZIZ S, TAGLIASACCHI A, PAULY M. Sparse iterative closest point [J]. Computer Graphics Forum, 2013, 32(5): 113-123.
- [12] SHI Xiaojing, LIU Tao, HAN Xie. Improved iterative closest point (ICP) 3D point cloud registration algorithm based on point cloud filtering and adaptive fire-works for coarse registration [J]. International Journal of Remote Sensing, 2020, 41(8): 3197-3220.

- [12] 沈江华, 孙殿柱, 李延瑞, 等. 点云初始配准的优化求解算法 [J]. 西安交通大学学报, 2019, 53(8): 167-174.
SHEN Jianghua, SUN Dianzhu, LI Yanrui, et al. An optimization algorithm for initial registration of point clouds [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2019, 53(8): 167-174.
- [13] 彭真, 吕远健, 渠超, 等. 基于关键点提取与优化迭代最近点的点云配准 [J]. 激光与光电子学进展, 2020, 57(6): 60-71.
PENG Zhen, LV Yuanjian, QU Chao, et al. Accurate registration of 3D point clouds based on keypoint extraction and improved iterative closest point algorithm [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2020, 57(6): 60-71.
- [14] PAVLOV A L, OVCHINNIKOV G W, DERBY-SHEV D Y, et al. AA-ICP: iterative closest point with Anderson acceleration [C]// 2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2018: 3407-3412.
- [15] ZHANG Juyong, YAO Yuxin, DENG Bailin. Fast and robust iterative closest point [J/OL]. IEEE transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2021 [2021-10-01]. <https://doi.org/10.1109/tpami.2021.3054619>.
- [16] CHEN Yang, MEDIONI G. Object modelling by registration of multiple range images [J]. Image and Vision Computing, 1992, 10(3): 145-155.
- [17] RUSINKIEWICZ S, LEVOY M. Efficient variants of the ICP algorithm [C]//Proceedings of the Third International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2001: 145-152.
- [18] LOW K L. Linear least-squares optimization for point-to-plane ICP surface registration: TR04-004 [R]. Raleigh, NC, USA: University of North Carolina at Chapel Hill, 2004.
- [19] PARK J, ZHOU Qianyi, KOLTUN V. Colored point cloud registration revisited [C]// 2017 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2017: 143-152.
- [20] RUSINKIEWICZ S. A symmetric objective function for ICP [J]. ACM Transactions on Graphics, 2019, 38(4): 85.
- [21] BERGEVIN R, SOUCY M, GAGNON H, et al. Towards a general multi-view registration technique [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1996, 18(5): 540-547.
- [22] 徐思雨, 祝继华, 田智强, 等. 逐步求精的多视角点云配准方法 [J]. 自动化学报, 2019, 45(8): 1486-1494.
XU Siyu, ZHU Jihua, TIAN Zhiqiang, et al. Step-wise refinement approach for registration of multi-view point sets [J]. Acta Automatica Sinica, 2019, 45(8): 1486-1494.
- [23] GOJCIC Z, ZHOU Caifa, WEGNER J D, et al. Learning multiview 3D point cloud registration [C]// 2020 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2020: 1756-1766.
- [24] ZHU Jihua, JIANG Zutao, EVANGELIDIS G D, et al. Efficient registration of multi-view point sets by K -means clustering [J]. Information Sciences, 2019, 488: 205-218.
- [25] MATEO X, ORRIOLS X, BINEFA X. Bayesian perspective for the registration of multiple 3D views [J]. Computer Vision and Image Understanding, 2014, 118: 84-96.
- [26] ZHU Jihua, GUO Rui, LI Zhongyu, et al. Registration of multi-view point sets under the perspective of expectation-maximization [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2020, 29: 9176-9189.
- [27] 林桂潮, 唐昀超, 邹湘军, 等. 融合高斯混合模型和点到面距离的点云配准 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2018, 30(4): 642-650.
LIN Guichao, TANG Yunchao, ZOU Xiangjun, et al. Point cloud registration algorithm combined Gaussian mixture model and point-to-plane metric [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2018, 30(4): 642-650.
- [28] CHAMROUKHI F. Robust mixture of experts modeling using the t distribution [J]. Neural Networks, 2016, 79: 20-36.
- [29] RAVIKUMAR N, GOOYA A, ÇIMEN S, et al. Group-wise similarity registration of point sets using student's t -mixture model for statistical shape models [J]. Medical Image Analysis, 2018, 44: 156-176.
- [30] GOVINDU V M, POOJA A. On averaging multiview relations for 3D scan registration [J]. IEEE transactions on Image Processing, 2014, 23(3): 1289-1302.
- [31] ARRIGONI F, ROSSI B, FUSIELLO A. Global registration of 3D point sets via LRS decomposition [C]// Proceedings of the 2016 European Conference on Computer Vision (ECCV). Cham, Germany: Springer International Publishing, 2016: 489-504.

- [32] ZHANG Xin, ZHANG Yan, QU Chengzhi, et al. Fast and robust motion averaging via angle constraints of multi-view range scans [J]. The Journal of Engineering, 2021(2): 104-113.
- [33] NUCHTER A, LINGEMANN K, HERTZBERG J. Cached k-d tree search for ICP algorithms [C]//Sixth International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling (3DIM 2007). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2007: 419-426.
- [34] Standford University. The Stanford 3D scanning repository [EB/OL]. (2014-08-19)[2021-10-01]. <https://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/>.
- [35] EVANGELIDIS G D, HORAUD R. Joint alignment of multiple point sets with batch and incremental expectation-maximization [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2018, 40(6): 1397-1410.

(编辑 陶晴 亢列梅)